EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN IN BINNEN- EN BUITENLAND

32E JAARGANG 1956/57
VIII — 1 MEI 1957

INHOUD

ERVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-DJAKARTA

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (ƒ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en ƒ 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE WETENSCHAPPELIJKE GRONDSLAGEN DER ELEMENTAIRE WISKUNDE. AXIOMATICA EN MEETKUNDE [1])

door

Prof. Dr. G. H. A. GROSHEIDE F.W.zn

§ 1. *Inleiding.*

Zoals bekend is het doel, dat Euclides zich bij het schrijven van zijn Elementen voor ogen stelde, eerst in de tweede helft van de vorige eeuw volledig bereikt. Van de wiskundigen, die hiertoe in belangrijke mate bijdroegen, moeten speciaal M. Pasch (1843—1931), G. Peano (1858—1932) en D. Hilbert (1862—1943) vermeld worden. De „Grundlagen der Geometrie" [7] van laatstgenoemde is een standaardwerk, dat tot de wiskundige klassieken behoort en waarin de hoofdtrekken van de meeste later verschenen geschriften, alle terug te vinden zijn.

Het is onze bedoeling eerst aan de hand van het betoog van Hilbert te laten zien, wat men onder een axioma verstaat en welke eisen men aan een stelsel axioma's moet en kan stellen. Daarbij stuiten wij op het bestaan van meer dan één meetkunde en op de mogelijkheid van meer dan één systeem van axioma's voor dezelfde meetkunde. Dit doet de vraag rijzen, hoe de euclidische meetkunde te midden van de overige is te typeren en wat de inhoud van de elementaire meetkunde is. Ook leidt het er toe, dat wij aandacht schenken aan de aard en de plaats van objecten als punten en rechten en van de in de meetkunde optredende relaties.

Het is uit deze opzet duidelijk, dat wij ons aansluiten bij de gangbare opvatting, waarbij de leer van de grondslagen met de axiomatica vrijwel wordt vereenzelvigd.

§ 2. *Axioma.*

Hilbert dan gaat uit van drie soorten (grond)-objecten: de punten, de rechten en de vlakken, waartussen bepaalde betrekkingen kunnen bestaan, welke worden aangeduid met woorden als:

---

[1]) Voordracht gehouden op 27 augustus 1956 tijdens de „vakantiecursus 1956" van het Mathematisch Centrum.

incident (liggen in, gaan door), tussen, congruent, parallel en continu. Voor het optreden van elk dezer grondrelaties geeft hij regels aan in

de verbindingsaxioma's (incident) I 1—I 8,
de rangschikkingsaxioma's (tussen) II 1—II 4,
de congruentieaxioma's (congruent) III 1—III 5,
een parallellenaxioma IV (dat alleen de aanwezigheid van ten *hoogste* één parallel uitspreekt, daar die van ten minste één reeds uit I, II en III volgt)
en de continuïteitsaxioma's V 1—V 2 (het axioma [1]) van het meten en het volledigheidsaxioma).

Met betrekking tot de inhoud dezer regels is het merkwaardig te constateren, dat Hilbert, die reeds in zijn inleiding uitsprak, dat het opstellen van axioma's voor de meetkunde en het onderzoek van het verband daartussen uitloopt op de logische analyse van onze ruimtelijke aanschouwing, ter kenschetsing van de rubricering opnieuw van zekere bij elkander behorende waarnemingen rept. Dit herinnert er aan, dat men oorspronkelijk van een axioma verlangde, dat het een door ieder erkende waarheid onder woorden zou brengen. Zoals bekend heeft men deze eis in de vorige eeuw laten vervallen, nadat gebleken was, dat de euclidische meetkunde niet de enig mogelijke was en dat voorts tengevolge van de gemaakte abstracties en de onnauwkeurigheden bij het waarnemen, de axioma's in de fysische werkelijkheid ten hoogste bij benadering vervuld zijn.

Hilbert stelt deze eis dan ook niet, maar acht het toch gewenst vooraf te wijzen op het niet geheel ontbreken van een band met de realiteit buiten ons. Wij zullen deze binding in het volgende nog meer ontmoeten en bepalen ons er voor het ogenblik toe op te merken, dat ook thans uit overwegingen van didactische of andere aard voorkeur kan bestaan voor aanschouwelijk evidente axioma's, die, zonder uitdrukkelijke formulering zelfs, als vanzelfsprekend worden aanvaard [11, blz. 19].

Voor de functie, die de axioma's in een moderne theorie bezitten is de herkomst er van totaal onbelangrijk. Na vele vruchteloze pogingen, reeds van de dagen van Euclides af ondernomen, om begrippen zoals punt en rechte te definiëren (zie § 11), ging men er toe

---

[1]) Axioma van het meten (Archimedes, Eudoxus): Zijn AB en CD twee willekeurige lijnstukken, dan bevat de rechte AB een aantal punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zodanig dat de lijnstukken $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ alle met het lijnstuk CD congruent zijn en B tussen A en A_n ligt.

over een aantal grondobjecten volledig ongedefinieerd voorop te zetten. Deze objecten bezitten dan in eerste instantie geen enkele andere eigenschap dan hun bestaan en zelfs daarover is nog weinig bekend. Door het uitspreken van axioma's bewerkt men nu, dat zij eigenschappen verkrijgen. Daarbij is men formeel door niets gebonden. Slechts zal men de wens koesteren, dat het resultaat van zijn arbeid zinvol is en bovendien recht kan doen gelden op de naam meetkunde [10 p. 17]. Hieruit volgt terstond, dat men voor de toelaatbaarheid van een stelsel axioma's noodzakelijk zal achten, dat het *niet strijdig* is. Twee stellingen, die elkaar tegenspreken, mogen niet gelijktijdig met behulp er van te bewijzen zijn.

§ 3. *Niet-strijdigheid.*

Het is duidelijk, dat bij een dergelijke opbouw van groot belang is, welke bewijsmethoden men wenst te aanvaarden, anders gezegd, wanneer men iets als een logisch gevolg van iets anders wil beschouwen. Bovendien rijst de vraag, op welke wijze men in staat is de vereiste niet-strijdigheid aan te tonen. Zolang men de oude gedachten had omtrent hetgeen een axioma diende uit te spreken, lagen hier geen moeilijkheden. De niet-strijdigheid der axioma's was immers verzekerd door het bestaan van een werkelijkheid, waarin zij vervuld waren en door het feit, dat de mens begiftigd is met een verstand en met zintuigen, die harmoniëren met de schepping rondom hem, zodat hij zich daarvan kennis kan verwerven.

In wezen geeft men voor het niet-strijdig zijn der axioma's in de tegenwoordige tijd volkomen dezelfde grond aan, wanneer men dit aantoont door de constructie van een *model,* waarin zij alle gelden.

Bij Hilbert geschiedt de opbouw van een dergelijk model als volgt. Men beschouwt de verzameling Ω van alle algebraïsche getallen, die te verkrijgen zijn door uit te gaan van het getal 1 en vervolgens een eindig aantal malen toe te passen de bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en $|\sqrt{1+\omega^2}|$. Daarbij stelt ω telkens een getal voor, dat tevoren op de aangegeven wijze ontstond. Nu noemt men een gerangschikt drietal getallen (x, y, z) uit Ω punt en de gedurige verhouding $u : v : w : t$ van vier getallen uit Ω (of de vergelijking $ux + vy + wz + t = 0$) vlak, om eindelijk met de uit de analytische meetkunde bekende gegevens een systeem te construeren, waarbinnen (naar blijkt) de aanvaarde axioma's met uitzondering van V 2 geldig zijn. Kiest men in plaats van Ω de verzameling P van alle reële getallen, dan ontstaat een model van een

euclidische ruimte (die der gewone stereometrie!), waarin ook het volledigheidsaxioma vervuld is (zie § 7.).

Een typisch kenmerk van het geschetste betoog is, dat het neerkomt op het verschuiven van de bewijslast. Bij het trekken van de conclusie overweegt men, dat met twee elkaar tegensprekende meetkundige beweringen, in het model, twee met elkaar strijdige formules corresponderen en dat deze laatste nimmer gelijktijdig bewijsbaar zullen zijn. De meetkundige toont hier een groot vertrouwen in de deugdelijkheid van de fundering, waarop zijn rekenkundige collega zijn werk verricht. Of dit vertrouwen gewettigd is, kunt U uit andere voordrachten van deze vakantiecursus afleiden. Thans zij alleen opgemerkt, dat in het verschuiven van de moeilijkheden iets onbevredigends zit, te meer daar dit niet onbeperkt voortgezet kan worden en uiteindelijk bij bepaalde grondbegrippen als natuurlijk getal en verzameling moet stoppen. Het is dan ook begrijpelijk, dat men wegen gezocht heeft de „modelmethode" door een andere te vervangen [1]).

§ 4. *Volledigheid.*

Een niet beslist noodzakelijke, maar door Hilbert wel aan zijn stelsel axioma's opgelegde eis is, dat het behalve niet-strijdig ook *volledig* of *kategorisch* is. Daaronder verstaat hij [7 Anhang VI S. 242] dat *alle* stellingen van de beschouwde meetkunde met behulp er van te bewijzen moeten zijn. Het is duidelijk, dat zich hier enige moeilijkheden voordoen.

Om te beginnen zal men, om de volledigheid van een stelsel axioma's in deze zin te kunnen bewijzen, in staat moeten zijn vóór de aanvang van zijn onderzoek nauwkeurig de inhoud te beschrijven van de meetkunde, waarmede men zich bezig wil houden. Hilbert zelf begint zijn verhandeling met de woorden „Die Geometrie" en gaat er van uit, dat de lezer zonder meer begrijpt, wat hij daarmede bedoelt. Strikt genomen weet men echter eerst na de lezing van het eerste hoofdstuk, wat het voorwerp van studie is, en dit is dan nog niet anders te definiëren dan als het geheel der stellingen welke te bewijzen zijn met behulp van de axioma's I 1—V 2. Dat deze laatste een volledig stelsel vormen staat zo van te voren vast en eerst na de constructie van een ander systeem van axioma's voor dezelfde (euclidische) meetkunde is een bewijs van de volledigheid noodzakelijk.

Gewoonlijk is er meer dan één weg om een bepaalde meetkunde

---

[1]) De vraag of niet-realiseerbare stelsels mogelijk zijn, laten wij onbesproken.

te benaderen. Men kan bijvoorbeeld in ons geval uitgaan van het met het lichaam der reële getallen P geconstrueerde aritmetische model (zie § 3) en de daarin bewezen formules meetkundig formuleren. Ook zijn er meetkunden — men denke aan de projectieve —, die verkregen worden of althans kunnen worden door in een andere meetkunde de eigenschappen af te zonderen, die behouden blijven bij bepaalde transformaties. En zo zouden meer mogelijkheden te noemen zijn om een meetkunde te introduceren. Onverschillig welke men kiest, komt men daarbij voor het probleem te staan, dat de uitdrukking „*alle* stellingen" in de definitie van het begrip volledig geen nauwkeurig omschreven wiskundige inhoud bezit en dus het begrip volledigheid van een axiomastelsel evenmin. Er wordt verlangd een uitspraak te doen over stellingen en complexen van stellingen, hetgeen zoals Reidemeister opmerkt [9 S. 62) meer tot het terrein der logica, dan tot dat der wiskunde behoort. Willen wij ons in deze richting niet begeven, dan moeten wij trachten het begrip volledig een zodanige betekenis toe te kennen, dat het bewijs van de volledigheid een zuiver wiskundige aangelegenheid wordt.

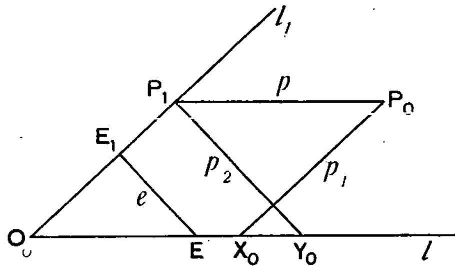
De meest gevolgde methode om dit te bereiken is, dat men een systeem van axioma's dan en slechts dan volledig noemt, als alle modellen, waarin het te realiseren is, onderling *isomorf* zijn. Dat wil zeggen, dat deze zodanig ééneénduidig op elkaar af te beelden zijn, dat met alle volgens de axioma's in het origineel aanwezige relaties, dezelfde relaties in het beeld corresponderen.

Het stelsel axioma's van Hilbert is ook volledig in deze betekenis. Zijn stelling van de volledigheid luidt, dat de punten, rechten en vlakken een systeem van elementen vormen, dat niet zodanig met andere punten, rechten en vlakken is uit te breiden, dat de geldigheid der axioma's en de wijze, waarop er aan is voldaan, behouden blijven. Deze volledigheid wordt verkregen door haar in V 2 voor het systeem van punten op een rechte te postuleren. Zoals men ziet, valt hier het accent op het aanwezig zijn der objecten. Het volledigheidsaxioma stelt in staat het bestaan van een grens overeenkomend met de snede van Dedekind aan te tonen en de stelling van Bolzano over de aanwezigheid van verdichtingspunten te bewijzen.

Wij hebben daardoor de volgende situatie: Op grond van de axioma's I 1—V 1 is het mogelijk na de keuze van een nulpunt O en een eenheidspunt E aan elk punt van de rechte OE een reëel getal toe te voegen. Dank zij V 2 correspondeert omgekeerd met elk reëel getal een punt op de rechte. Uitsluitend op grond van de (synthetische) axioma's is dus een ééneénduidige afbeelding van de

punten der rechte op de reële getallen te construeren. Zoals later in deze § nog nader wordt toegelicht, is deze afbeelding uit te breiden tot een isomorfe afbeelding van de gehele ruimte op het met het lichaam der reële getallen P geconstrueerde model. Daaruit volgt dan, dat ook eventuele andere realisaties der beschouwde meetkunde met dit model isomorf zijn.

Het principe van de zo juist gevolgde redenering is aldus aan te geven: eerst worden op de rechte en vervolgens in de gehele ruimte coördinaten ingevoerd. Daarna wordt met behulp van deze coördinaten de aanwezigheid van isomorfie tussen alle modellen bewezen. Eenzelfde methode past men met succes toe bij volledigheidsbewijzen in andere vormen van meetkunden, waarvoor men over een aritmetisch model beschikt. Reeds in een „affiene meetkunde", dat wil zeggen, alleen op de grondslag van de verbindingsaxioma's I en een verscherpt parallellenaxioma IV* (met *juist* één), is het mogelijk coördinaten te definiëren en een analytische meetkunde op te bouwen. Deze invoering houdt in, dat aan elk punt der (affiene) ruimte een drietal gerangschikte punten van een vast gekozen rechte l worden toegevoegd.



Voor het affiene vlak verloopt dit als volgt:

Wij kiezen drie niet-gerichte punten O, E en E_1, die wij verbinden door de rechten $l = OE$, $l_1 = OE_1$ en $e = EE_1$. Door een willekeurig punt P_0 van het vlak trekken wij vervolgens de rechte p parallel met l en de rechte p_1 parallel met l_1. Daar door O niet twee rechten parallel met p gaan, snijdt p de rechte l_1 in een punt P_1. Evenzo snijdt p_1 de rechte l in een punt X_0. Trekken wij tenslotte door P_1 de rechte p_2 parallel met e, dan is deze niet parallel met l, omdat door E slechts één rechte parallel met p_2 gaat. Dus heeft p_2 met l een punt Y_0 gemeen. Aan het punt P_0 is zo op ondubbelzinnig bepaalde wijze een tweetal gerangschikte punten (X_0, Y_0) op l toegevoegd, terwijl omgekeerd met elk dergelijk tweetal een punt P_0 correspondeert.

Op analoge wijze kent men in een affiene ruimte aan een wille-

keurig punt drie coördinaten (X_0, Y_0, Z_0) toe. Om deze te kunnen gebruiken bij een „analytische" opbouw is het vereist, dat men er mede kan „rekenen". Daartoe definieert men voor de punten van de „coördinaatas" l een optelling (d.w.z. men geeft een voorschrift volgens hetwelk aan elk tweetal gerangschikte punten A en B van l een derde C = A + B wordt toegevoegd) en een vermenigvuldiging (D = A . B) en wel zodanig, dat hiervoor alle wetten gelden, die voor de gelijknamige bewerkingen met rationale getallen vervuld zijn; slechts behoeft A . B niet met B . A samen te vallen. Het systeem van de punten op l is daarmede, naar men zegt, tot een (in het algemeen niet-commutatief) lichaam Λ gemaakt.

Behalve vaste punten (X_0, Y_0, ... A, B, . . ., U, V, . . .) kan men op l ook lopende punten (X, Y, . . .) onderscheiden en omdat men beschikt over de rekenkundige bewerkingen, bezit men al wat nodig is voor het opstellen van vergelijkingen. Zo is men in staat te bewijzen, dat met een vlak in de ruimte een vergelijking UX + VY + WZ + S = O correspondeert en verder dat de opbouw mogelijk is van een analytische meetkunde, die slechts daarin principieel van de gewone verschilt, dat thans hoofdletters (dus punten en geen getallen) optreden. Enige voorzichtigheid is nog wel geboden, omdat de vermenigvuldiging niet noodzakelijk commutatief is en dus de coëfficiënten U, V, W en S uitsluitend links van de veranderlijken geplaatst mogen worden.

Aanvaarden wij naast I en IV* eveneens de overige axioma's van Hilbert, dan kunnen wij — zoals wij reeds opmerkten — een voorschrift aangeven volgens welk aan ieder punt van l ondubbelzinnig omkeerbaar een reëel getal is toegevoegd. Door de wijze waarop de vermenigvuldiging en de optelling van punten op l gedefinieerd werden, blijven bij deze afbeelding alle relaties van som, product, rangschikking en continuïteit behouden. Corresponderen nu met X_0, Y_0, en Z_0 opvolgend de reële getallen x_0, y_0, en z_0, dan is er geen enkel bezwaar tegen overal (X_0, Y_0, Z_0) door (x_0, y_0, z_0) te vervangen. Immers dit is niet anders dan het overstappen van het gegeven lichaam Λ (dat der punten op l) op het daarmede isomorfe lichaam P (dat der reële getallen). Volledig uitvoeren van de genoemde verwisseling doet tenslotte op de gewone analytische meetkunde uitkomen. De strekking van de axioma's II, III en V is dus blijkbaar de gewenste isomorfie tussen Λ en P te verzekeren. Zo wordt dan de reële euclidische meetkunde verkregen. Er zijn echter andere mogelijkheden.

Wanneer wij voor de coördinaten en coëfficiënten in onze analytische opbouw complexe getallen toelaten (anders gezegd een model

construeren met het lichaam der complexe getallen) verkrijgen wij een realisatie van de complexe euclidische meetkunde, waarin bijvoorbeeld een bol en een rechte steeds een snijpunt bezitten. Voor deze meetkunde moeten wij een ander stelsel axioma's aangeven, want de rangschikkingsaxioma's II van Hilbert zijn daarin niet vervuld [3]. Dezelfde taak wacht, wanneer wij koersen in de richting van een affiene ruimte met slechts een eindig aantal punten. Steeds echter hebben de aan I en IV* toegevoegde axioma's hetzelfde effect, namelijk het lichaam Λ nader te preciseren. Eerst als dit tot op isomorfie na bepaald is, kan het stelsel axioma's in de tweede betekenis volledig genoemd worden.

§ 5. *Onafhankelijkheid.*

Naast de besproken eisen van niet-strijdigheid en volledigheid zijn er andere, die men uit overwegingen van systematische of esthetische aard aan een stelsel axioma's kan stellen. Verreweg de belangrijkste daarvan is deze, dat de axioma's *onafhankelijk* zijn, anders gezegd, dat geen der axioma's met behulp van de overige te bewijzen en dus overtollig is. In het voorgaande ontmoetten wij twee aritmetische modellen, waarin de axioma's I 1—V 1 van Hilbert vervuld waren. In het tweede behorend bij het lichaam der reële getallen P werd aan het volledigheidsaxioma voldaan, in het eerste behorend bij het lichaam Ω niet. Het laatste axioma kan dus geen logisch gevolg van de overige zijn.

Wij leren uit dit voorbeeld een methode kennen, met behulp waarvan men de onafhankelijkheid van een bepaald axioma aantoont. Deze bestaat hierin, dat men een meetkunde aangeeft, waarin het beschouwde axioma niet, doch de overige axioma's wel vervuld zijn, en die dus bij veel overeenstemming toch in bepaalde opzichten van de onderzochte afwijkt. Er mag hier niet achterwege blijven te herinneren aan het klassieke voorbeeld van het toepassen dezer methode: de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde gedurende de vorige eeuw.

In de euclidische meetkunde gaat dank zij het postulaat van Euclides (of een daarmede equivalent parallellenaxioma) door een punt A buiten een rechte a juist één rechte parallel met a. Verwijderen wij dit postulaat uit het stelsel axioma's en kiezen wij in de plaats daarvan een ander, dat daarmede in strijd is, doordat het de aanwezigheid van meer dan één dergelijke parallel bewerkt, dan wordt het stelsel axioma's niet-strijdig en vormt het de grondslag voor een andere, van de euclidische afwijkende, meetkunde. Het postulaat van Euclides is dus onafhankelijk van de overige.

Intussen is de eis van onafhankelijkheid der axioma's geen dwingende en kunnen er zelfs overwegingen zijn deze niet in alle scherpte te stellen. Bij v. d. Waerden [11] treft men bijvoorbeeld een verbindingsaxioma aan, dat na het toevoegen van de rangschikkingsaxioma's uit de overige te bewijzen is. Weglaten er van zou echter bewerken, dat men niet meer beschikte over een volledig stelsel van de rangschikking onafhankelijke verbindingsaxioma's. Een factor van deze of dergelijke aard is somtijds hinderlijk. Hij belet in ons geval het zover mogelijk gelijktijdig ontwikkelen van de reële en de complexe euclidische meetkunde.

Een ander argument voor afhankelijke axioma's treedt op, indien in de meetkunde zekere symmetrieën voorkomen, die men reeds in de axiomatische fundering tot uitdrukking wil brengen. Hebben wij als axioma's voor het projectieve vlak ingevoerd, dat bij twee punten ten minste en dat bij twee (verschillende) punten ten hoogste één rechte behoort, die met beide incident is, dan kunnen wij bewijzen, dat met twee verschillende rechten ten hoogste één punt correspondeert, dat met beide incident is. Wij behoeven dus nog slechts te eisen, dat ten minste één dergelijk punt bestaat. In de axiomatische opbouw komt dan echter niet rechtstreeks tot uitdrukking, dat punten en rechten t.o.v. de incidentie-eigenschappen duaal met elkaar zijn.

Het is natuurlijk mogelijk het dualiteitsbeginsel zelf onder de axioma s op te nemen, doch in het algemeen doet men dit niet, en heeft dit beginsel het karakter van een uitspraak over wiskundige stellingen, zodat het — naar een opmerking van Gerretsen [6 blz. 5] — feitelijk in de metamathesis thuis behoort. In het onderhavige geval kan men trachten aan de tegenstrijdige wensen te voldoen door als axioma's te kiezen, dat met twee punten *juist* één rechte en met twee rechten *juist* één punt correspondeert. Van afhankelijkheid is er dan inderdaad geen sprake, maar uit een ander oogpunt zijn er nu wel bezwaren in te brengen.

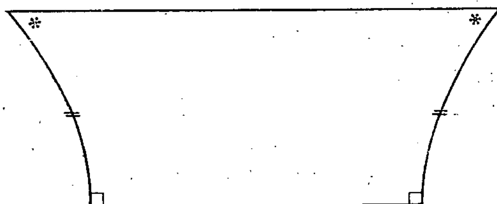
§ 6. *Enkelvoudigheid.*

Daar is allereerst de vraag of men axioma's als deze wil toelaten, omdat zij zogenaamd niet-enkelvoudig zijn. In „juist één" is immers zowel „ten minste één" als „ten hoogste één" begrepen. En in de tweede plaats is er het gebrek, dat onder de axioma's van het overigens verantwoorde stelsel er een voorkomt, dat meer eist dan noodzakelijk en door een zwakker te vervangen is.

Op de eerstgenoemde kwestie gaan wij niet nader in — in zijn volle omvang wordt de eis van enkelvoudigheid gewoonlijk niet

gesteld en het is zelfs niet zeker, dat er dan aan voldaan kon worden. [3 blz. 137]. Wel heeft men een zekere voorkeur voor axioma's, die niet gelijktijdig over twee ongelijksoortige relaties (bijvoorbeeld existentie en incidentie) een uitspraak doen.

Van de in het tweede punt genoemde situatie geven wij nog een paar voorbeelden van een even andere aard. Uit de voorgeschiedenis van de niet-euclidische meetkunde is bekend het onderzoek van Saccheri naar de juistheid van (wat hij noemde) de hypothesen van de scherpe, de rechte en de stompe hoek. Als in een vierhoek de



opstaande zijden even lang zijn en beide loodrecht op de basis staan, wat is dan de soort van de twee (aan elkaar gelijke) andere hoeken? Een antwoord hierop is niet te geven, wanneer men uitsluitend gebruik maakt van de axioma's, die de euclidische en de niet-euclidische meetkunde gemeen hebben. Wel is dan te bewijzen, dat de hoeken in *alle* beschouwde vierhoeken van dezelfde soort zijn. Verheft men dus één der hypothesen van Saccheri tot axioma, dan behoeft men deze slechts voor één vierhoek uit te spreken.

Iets analoogs heeft men bij sluitingsstellingen, zoals die van Desargues en Pappus-Pascal. Het is dikwijls voldoende, wanneer de geldigheid ervan voor een bijzonder geval gepostuleerd wordt, bijvoorbeeld voor een speciale ligging van bepaalde punten en rechten.

§ 7. *Meetkundige axioma's. Elementaire meetkunde.*

De vrijheid, welke men bezit bij het kiezen van axioma's is ook te benutten om te voldoen aan verlangens van puristische aard, zoals de wens, dat de axioma's een zuiver meetkundige inhoud zullen bezitten. Wij vermeldden reeds, dat de opname van het volledigheidsaxioma V 2 tot doel heeft te bewerken, dat bij de invoering van coördinaten op de rechte alle reële getallen voorkomen. Met de overige axioma's alleen kan men aantonen, dat de algebraïsche getallen uit het lichaam Ω (zie § 3) alle als coördinaten zullen optreden, maar meer ook zeker niet. Immers zijn in het met Ω geconstrueerde model alle axioma's I 1—V 1 vervuld. Door het kiezen van het volledigheidsaxioma of door, zoals van der Waerden doet,

het postuleren van de snede van Dedekind, maakt men dus de sprong van Ω naar P. Dit doet de vraag rijzen of deze continuïteitsaxioma's wel een meetkundige inhoud bezitten en of zij niet een getallentheoretische uitspraak in meetkundig gewaad bevatten. Bieberbach [2 S 43] beantwoordt de eerste vraag ontkennend en de tweede bevestigend en vindt het dan eerlijker royaal een axioma te kiezen van een type als: Het lichaam Λ (der meetkunde) is isomorf met dat der reële getallen. Bij andere vormen van meetkunden dan de euclidische is men veelal op een axioma van dit genre aangewezen (zie § 8).

De verschillende mate van waardering, die bepaalde axioma's genieten, is een nieuwe reden om de stellingen der meetkunde met zo min mogelijk axioma's te bewijzen en de postulaten, die voor hun geldigheid noodzakelijk zijn, op te sporen. Niet slechts de overeenstemming met verwante meetkunden, doch ook de innerlijke structuur van de beschouwde meetkunde zelf komt daardoor aan het licht. Een belangrijk resultaat door Hilbert bij een onderzoek van dit type verkregen is, dat de leer van de verhoudingen en de euclidische leer van de oppervlakten van vlakke figuren volledig zijn op te bouwen zonder gebruik van de continuïteitsaxioma's. Deze theorieën zijn daarmede zuiver meetkundig gefundeerd.

Voor de *elementaire meetkunde* blijkt dit ook mogelijk te zijn.

Wanneer wij experimenteel, bijvoorbeeld door het raadplegen van een groot aantal boeken, welke over planimetrie en (of) stereometrie handelen, trachten vast te stellen, wat deze term betekent, komen wij tot de conclusie, dat het begrip continuïteit daarin slechts een zeer bescheiden rol speelt. Het treedt alleen op bij het bewijzen, dat in een vlak een rechte (en dan ook een cirkel), die een punt binnen een gegeven cirkel C verbindt met een punt buiten C, de cirkel C in ten minste één punt snijdt. Zo is de elementaire meetkunde te definiëren, als het geheel der stellingen bewijsbaar met de axioma's I 1—IV en een axioma, dat de aanwezigheid van een snijpunt van een cirkel en een rechte in de aangegeven onderlinge ligging uitspreekt [11 blz. 37].

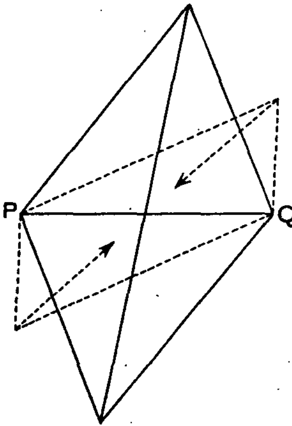
Het aldus ten grondslag gelegde stelsel axioma's kan men volledig noemen in de eerste algemenere zin des woords, doch het is dit niet in de scherpere betekenis daarvan. Dit verhindert niet, dat het begrip elementaire meetkunde (afgedacht van de reeds besproken moeilijkheid, wat men onder „geheel" en „bewijsbaar" zal verstaan) thans volkomen bepaald is. Het staat op één lijn met het begrip *absolute meetkunde*, waarmede J. Bolyai aanduidde de verzameling van alle stellingen, die zowel in de euclidische als in de hyperbolische meet-

kunde gelden en die dus onafhankelijk zijn van het postulaat van Euclides.

§ 8. *Midden als grondrelatie.*

Wij gaan thans over tot enkele andere mogelijkheden om de euclidische meetkunde te benaderen en beginnen daarbij met een publikatie van R. Baer [1], die ondanks het sterk formele karakter van de meeste zijner axioma's, zich toch in de klassieke sfeer bevindt. Zijn onderzoek doet zien, dat de grondbegrippen met behulp waarvan een gegeven meetkunde is op te bouwen, niet ondubbelzinnig vastliggen.

Wanneer men een affien vlak geheel zelfstandig gedefinieerd heeft als een verzameling van punten en rechten, waarin de vlakke [1]) verbindingsaxioma's I 1—3 en het verscherpte parallellenaxioma IV* vervuld zijn, geldt in dit vlak zonder meer geen enkele sluitingsstelling. De stelling van Desargues bijvoorbeeld, die met de ruimtelijke verbindingsaxioma's bewijsbaar is, is dit met de vlakke alleen niet. Een gevolg hiervan is, dat niet op zinvolle wijze aan een tweetal verschillende punten P en Q een punt van de daardoor bepaalde rechte PQ is toe te voegen, dat op de naam midden van P en Q aanspraak maakt.



Men kan wel een willekeurig parallelogram construeren met P en Q als overstaande hoekpunten en dan daarin het snijpunt der diagonalen R bepalen, doch alle zekerheid, dat men bij gebruik van een ander parallelogram met P en Q als overstaande hoekpunten op hetzelfde punt R uitkomt, ontbreekt. Bij geldigheid van de stelling van Desargues en zelfs met een zwakkere sluitingsstelling was dit te bewijzen.

Baer gaat nu als volgt te werk. Hij introduceert een (ternaire) grondrelatie, die hij noemt „R is het midden van PQ" en voorstelt door P . Q = R. Voor het optreden van deze relatie geeft hij vervolgens dit zestal axioma's:

I. Indien P . Q = R zijn P, Q en R drie verschillende punten van eenzelfde rechte.

[1]) Bij twee punten behoort ten minste (I1) en ten hoogste (I2) één rechte, die met beide incident is. Een rechte is met ten minste twee punten incident en er zijn ten minste drie punten, die niet met een zelfde rechte incident zijn (I3).

II. Uit $P \cdot Q = R$ volgt $Q \cdot P = R$.

Indien P en Q twee verschillende punten zijn, bestaat er

III E. ten minste één punt R met $P \cdot Q = R$.
III U. ten hoogste één punt R met $P \cdot Q = R$.
IV E. ten minste één punt R met $P \cdot R = Q$.
IV U. ten hoogste één punt R met $P \cdot R = Q$.

Aan deze postulaten, die niet onafhankelijk blijken te zijn, voegt hij tenslotte nog een laatste toe, dat de invariantie van de relatie bij parallelle projectie inhoudt:

V. Indien $P \cdot Q = R$, indien P', Q', R' gerichte punten zijn, en indien er verder drie verschillende maar parallelle rechten p, q, r bestaan, zodanig dat p incident is met P en P′, q met Q en Q′, r met R en R′, geldt $P' \cdot Q' = R'$.

Voor de niet-strijdigheid dezer axioma's staat de elémentaire meetkunde borg. Er is te bewijzen, dat op grond er van bij twee gegeven punten P en Q slechts één punt te vinden is, dat als midden R kan optreden. En voorts is men na de invoering van de middenrelatie in staat coördinaten in te voeren. Deze worden dan genomen uit een systeem met dubbele compositie, dat weliswaar geen lichaam is (zoals Λ), maar toch de meeste eigenschappen van een lichaam bezit. Baer noemt het een rechter distributief cartesiaans getallenstelsel met een karakteristiek p verschillend van 2 d.w.z. met $E + E \neq O$.

In het aldus nader gedefinieerde affiene vlak geldt nu, dat de zwaartelijnen van een driehoek voor $p = 3$ (d.w.z. voor $E + E + E = O$) parallel en voor $p \neq 3$ concurrent zijn, waarbij in het laatste geval de verhouding van de stukken, waarin zij elkaar verdelen 1 : 2 is. De axiomatische achtergrond van deze bekende stelling uit de planimetrie is daardoor nader belicht.

§ 9. *Afstand als grondrelatie. Metrische ruimte.*

Een ander systeem van axioma's voor de euclidische meetkunde is dat van M. Pieri. Wij vermelden dit slechts om de merkwaardigheid, dat het voor de enige aanwezige grondobjecten, de punten, slechts één relatie invoert, namelijk $A \epsilon B_c$, welke kan gelezen worden: A ligt op een bol door B met C als middelpunt, of ook: C is evenver van A verwijderd als van B. Daarmede hebben wij tevens het begrip *afstand* ontmoet, dat misschien logisch na het begrip omgeving komt, doch alleen reeds uit de overweging, dat de meetkunde haar ontstaan dankt aan het verrichten van metingen op aarde, waard is nader beschouwd te worden.

In de elementaire meetkunde, of als wij nog verder teruggaan, in de wereld rondom ons bezit de afstand pq van twee punten p en q de volgende eigenschappen:

1. *Hij is voor twee verschillende punten niet nul* ($pq > 0$ *voor* $p \neq q$).
2. *Hij is voor twee samenvallende punten nul* ($pq = 0$ *voor* $p = q$)
3. *Hij is onafhankelijk van de volgorde der punten* ($pq = qp$),

terwijl tenslotte voor een drietal punten p, q en r geldt de

4. *driehoeksongelijkheid* ($pq + qr \geqq pr$).

Het staat zonder meer niet vast, dat tussen de afstanden van een aantal punten niet nog andere relaties bestaan, die niet uit de vier genoemde volgen. Wel kan men zeggen, dat hetgeen in het dagelijkse leven als het meest kenmerkende van het begrip afstand wordt gevoeld, in de bovenstaande punten is uitgesproken. Bij een invoering van de axioma's op de wijze waarop en in de volgorde waarin Hilbert dit doet, is wel reeds na het laatste congruentieaxioma III 5 de stelling te bewijzen, dat de som van twee zijden van een driehoek groter dan of gelijk aan de derde zijde is. Doch dit is een zuiver meetkundige aangelegenheid, want de mogelijkheid aan elk lijnstuk een lengte en dus aan elk tweetal punten een afstand toe te kennen, wordt eerst verzekerd door het axioma van Archimedes.

De euclidische meetkunde is niet de enige meetkunde, waarin twee punten een afstand bezitten, die aan de vier opgestelde regels voldoet. Ook bijvoorbeeld in de hyperbolische meetkunde komt deze eigenschap voor. Wij kunnen de stellingen, die al deze meetkunden gemeen hebben en daarmede de rol, die het begrip afstand speelt, opsporen door als meetkundigen in de letterlijke zin des woords, het bezitten van een afstand, als een grondrelatie tussen twee punten te beschouwen. Dit leidt tot, wat men noemt, de *metrische ruimte*, welke wordt gedefinieerd als

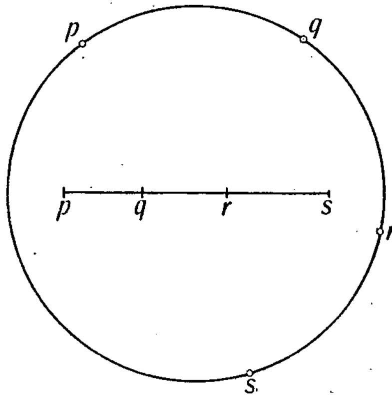
(*metrische ruimte*): *een systeem van elementen (punten), waarin aan elk gerangschikt puntenpaar p, q een niet-negatief getal pq (de afstand) is toegevoegd, zodanig dat de axioma's* 1, 2, 3 *en* 4 *vervuld zijn.*

Zonder genoodzaakt te zijn een nieuw axioma toe te voegen, kan men in een metrische ruimte de relatie *tussen* invoeren. Dit geschiedt door de

Definitie: *Het punt q ligt dan en slechts dan tussen de punten p en r, als geldt* $pq + qr = pr$, ($p \neq q \neq r$).

Men ziet terstond in, dat het gebruik van het begrip tussen in de elementaire meetkunde volgens deze definitie verantwoord is. Daar staat echter naast, dat voor de rangschikking van de punten op een

affiene rechte stellingen gelden, die voor een willekeurige metrische ruimte niet juist zijn. Nemen wij bijvoorbeeld de omtrek van een cirkel en definiëren wij als de afstand van twee punten daarop de lengte van de kortste boog, dan volgt niet steeds uit pqr (q tussen p en r) en qrs (r tussen q en s), dat q tussen p en s ligt (pqs). Het is een kwestie van smaak (bijna van signifische aard) of men moet concluderen, dat door de metrische definitie het begrip tussen niet wordt uitgeput, of dat men moet constateren, dat de rangschikkingsaxioma's meer doen dan de relatie tussen bepalen.



Wij staan nu voor de opgave de euclidische ruimte metrisch, dat wil zeggen met behulp van het begrip afstand te karakteriseren. De oplossing hiervan begint met het invoeren van de axioma's:

a. *De metrische ruimte is convex*, dat wil zeggen: bij elk paar verschillende punten p en r is ten minste één punt q te vinden, dat tussen p en r ligt.

b. *De metrische ruimte is uitwendig convex*, dat wil zeggen: bij elk paar punten p en q is ten minste één punt r te vinden, zodanig dat q tussen p en r ligt.

c. *De metrische ruimte is (metrisch) volledig*, dat wil zeggen: bij elke oneindige rij $\{p_n\}$ van punten, waarvoor geldt $\lim\limits_{i,j\to\infty} p_i p_j = 0$, is een punt p te vinden, waarvoor geldt $\lim\limits_{n\to\infty} pp_n = 0$.

Duiden wij daarna met $D(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ de gerande determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 0 & (p_1 p_2)^2 & \ldots\ldots & (p_1 p_k)^2 \\ 1 & (p_2 p_1)^2 & 0 & \ldots\ldots & (p_2 p_k)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1 & (p_k p_1)^2 & (p_k p_2)^2 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

aan, dan volgt het overige uit de

Tweede hoofdstelling (van Menger): Een semimetrische ruimte S is dan en slechts dan congruent met de euclidische n-dimensionale ruimte R_n, als

(1) S *volledig, convex en uitwendig convex is.*
(2) D $(p_1, p_2, \ldots, p_k) = 0$ *is of het teken* $(-1)^k$ *bezit voor elk systeem van k punten van* S $(2 \leqq k \leqq n+1)$.
(3) D *nul is voor elk systeem van* $n+2$ *punten van* S *en n het kleinste gehele getal is met deze eigenschap.*

Wij merken op, dat het voldoende is te veronderstellen, dat S semimetrisch is, omdat de driehoeksongelijkheid uit de overige eisen volgt. Voorts dat congruent in de stelling betekent: op R_n af te beelden door een topologische (d.w.z. ééneénduidige en omkeerbaar continue) transformatie, waarbij de afstand van twee punten ongewijzigd blijft. Hoewel afstand geen topologisch begrip is, hebben de eerste onderzoekers van de metrische ruimten, zoals Fréchet en zijn opvolgers zich geheel beperkt tot het opsporen van de topologische eigenschappen er van. Eerst in de twintiger jaren ontdekte Menger de mogelijkheden, die de metriek bood, hetgeen leidde tot de opkomst der *afstandsmeetkunde*, die zich dus bezig houdt met de eigenschappen der figuren in metrische ruimten, welke behouden blijven bij topologische afbeeldingen, die de afstanden niet aantasten [4].

§ 10. *Groep der bewegingen.*

Onder de metrische ruimten zijn er, die (niet triviaal) congruent op zich zelf zijn af te beelden. Zoals bekend is dit o.a. het geval met de euclidische ruimten R_n van een willekeurig aantal dimensies n. Bij het bespreken van deze congruente afbeeldingen van R_n op zichzelf zullen wij ter vermijding van complicaties doen, alsof de transformaties steeds voor de gehele ruimte gedefinieerd zijn en alsof er geen vraagstukken van omloopszin en spiegeling bestaan. Alle bedoelde transformaties hebben dan recht op de naam *beweging*.

Door het feit, dat voor de bewegingen daarbinnen $\frac{1}{2}n(n+1)$ vrijheidsgraden bestaan, anders gezegd, dat de bewegingen een $\frac{1}{2}n(n+1)$-ledige groep vormen, zijn de euclidische ruimten reeds voor een groot gedeelte getypeerd. Bij een analytische opbouw der meetkunde, waarbij de punten gedefinieerd worden door coördinaatgrepen $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, noemt men de verzameling van alle punten een ruimte van Riemann V_n, indien daarin een lijnelement

$ds^2 = \Sigma g_{ik} dx^i dx^k$ gegeven is. In de differentiaalmeetkunde [1]) bewijst men nu, dat V_n dan en slechts dan in het bezit is van een groep van bewegingen met $\frac{1}{2}n(n + 1)$ vrijheidsgraden, als de kromming der ruimte een constante waarde heeft. Indien deze waarde nul en bovendien het lijnelement positief definiet is, heeft men te maken met een euclidische ruimte R_n.

Alle coördinatentransformaties, die in een willekeurige ruimte van Riemann toegelaten zijn, kunnen ook in R_n uitgevoerd worden. Er zijn echter in een euclidische ruimte coördinatenstelsels aanwezig, die een bijzondere plaats innemen en wel doordat het lijnelement t.o. daarvan de vorm $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2$ bezit. Bij gebruik van een dergelijk (cartesiaans rechthoekig) stelsel worden de bewegingen voorgesteld door inhomogene lineaire transformaties met een orthogonale modulus, die de waarde $+ 1$ heeft. In de geest van het Erlanger Programma van Felix Klein is nu de euclidische meetkunde te beschrijven als de invariantentheorie behorende bij de door deze transformaties gevormde groep. Wij herinneren er nog even aan, dat wij gemakshalve de spiegelingen buiten beschouwing lieten.

Hoewel de zo juist geschetste weg vermoedelijk de thans het meest begane is, om de euclidische meetkunde te introduceren, kan men er een bezwaar tegen inbrengen, namelijk dat hij de autonomie der meetkunde aantast. De aritmetisering moge niet verhinderen, dat althans de meeste stellingen nog synthetisch geformuleerd worden, de meetkundige inhoud van de bewijzen, waarmede men hun juistheid aantoont, blijft vrijwel volkomen verborgen. Bovendien heeft het recruteren van hulptroepen bij een bevriende mogendheid tot gevolg, dat men voor moeilijkheden komt te staan, die geheel vreemd zijn aan het eigen erf. Men denke bijvoorbeeld aan onderstellingen, die men moet maken over differentieerbaarheid van functies. Zo is er alle aanleiding nog even stil te staan bij enkele andere mogelijkheden om het begrip beweging in de meetkunde te benutten.

Allereerst is er dan de methode, die o.a. door van der Waerden [11] wordt toegepast, en waarbij men het begrip verplaatsing opneemt ter vervanging van de grondrelatie congruent. Voor de gehele structuur van het stelsel axioma's is dit nauwelijks van betekenis, zodat van der Waerden ook de naam congruentieaxioma's handhaaft. Het voornaamste voordeel van de gewijzigde keuze is, dat men axioma's verkrijgt, die meer aanschouwelijk van inhoud zijn. Dat

[1]) Zie bijv. L. P. Eisenhart, Riemannian geometry 1949, p. 88.

desondanks het begrip congruent eerder zijn intrede deed dan het begrip verplaatsing, behoeft niet te verbazen. Bij bewegingen heeft men ook te maken met de *tijd* en dat deze bij de wiskundige beschrijving der natuurkundige verschijnselen veelal dezelfde plaats inneemt als de ruimtelijke coördinaten, is een inzicht, dat eerst in de moderne tijd werd verkregen.

Een andere methode om met het begrip beweging (zij het niet als grondbegrip) de meetkunde te ontwikkelen is door Hilbert [7 Anhang IV] voor het euclidische vlak aangegeven. Nadat hij onder gebruik van begrippen uit de topologie, zoals kromme van Jordan, heeft gedefinieerd wat onder vlak, beweging en ware cirkel moet worden verstaan, voert hij de volgende drie axioma's in:

A. *De bewegingen vormen een groep met een invariante ondergroep.*

B. *Iedere ware cirkel bestaat uit oneindig veel punten.*

C. *De bewegingen vormen een afgesloten systeem.*

Er is nu te bewijzen, dat alle axioma's I 1—3, II 1—V 2 vervuld zijn, zódat door A, B en C inderdaad het euclidische vlak wordt bepaald. Daarbij wordt de geldigheid van IV verkregen door onder A te verlangen, dat er een invariante ondergroep zal zijn, hetgeen de hyperbolische meetkunde buiten sluit. Opgemerkt moet nog worden dat de definitie van het begrip vlak essentieel het getallenvlak en de daar geldende eigenschappen onderstelt, waardoor de continuïteit er van meet af in gelegd is. Voorts is het merkwaardig te constateren, hoeveel voorbereiding de invoering van het begrip rechte bij deze opzet vordert.

§ 11. *Structuren.*

Deze laatste opmerking doet ons zien, wat wij ook reeds eerder zagen, dat het voor de opbouw der meetkunde niet nodig is de rechte tot grondobject te kiezen. Zelfs met het punt is dit niet het geval, zoals blijkt uit de structuurtheoretische methode door Menger en Birkhoff aangewezen om de projectieve en de affiene ruimte van een willekeurig aantal dimensies in te voeren.

Een *structuur* is een verzameling van elementen A, B, . . ., waarbinnen twee bewerkingen gedefinieerd zijn, het verbinden A + B en het snijden A . B, welke voldoen aan de volgende axioma's [6]:

I. *De bewerkingen zijn commutatief*

$$A + B = B + A \,;\, A \,.\, B = B \,.\, A.$$

II. *De bewerkingen zijn assiociatief*

$$(A + B) + C = A + (B + C) \,;\, (A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C).$$

III. *De bewerkingen zijn absorberend*

$$A + (A . B) = A; \quad A . (A + B) = A.$$

Men kan nu bewijzen, dat de relaties

$$A + B = B \text{ en } A . B = A$$

gelijkwaardig zijn. Zijn ze vervuld voor twee elementen A en B, dan schrijven wij

$$A \leqq B \text{ of } B \geqq A$$

en zeggen: A is een deel van B.

Dat structuren bestaan en dat daarbinnen de relatie „deel van" kan optreden, tonen de affiene en de projectieve driedimensionale ruimte. Bij de gewone interpretatie van de woorden snijden en verbinden is het systeem van alle punten, alle rechten en alle vlakken aangevuld met de lege ruimte en de projectieve of affiene ruimte zelf, een structuur. De structuren zijn niet alle isomorf, d.w.z. niet alle ééneénduidig op elkaar af te beelden met behoud van de relaties verbinden en snijden. Het beneden te noemen axioma IV geldt wel in de structuur behorend bij de projectieve, doch niet in die behorend bij de affiene meetkunde, zoals blijkt, wanneer men voor C een vlak, voor A een punt in dit vlak en voor B een rechte parallel dit vlak kiest. Men zal dus een speciale gegeven structuur door het stellen van nieuwe axioma's nader moeten bepalen. Wij zullen dit doen voor het projectieve geval en daarmede komen tot een nieuwe invoering van de projectieve meetkunde.

Eerst eisen wij dan dat de structuur *modulair* is, d.w.z. dat geldt

IV. *Uit* $A \leqq C$ *volgt* $(A + B) . C = A + B . C$,

hetgeen minder inhoudt dan de distributiviteit der bewerkingen. Daarna

Va. *Er is een element* N *met* $A + N = A$ *voor elke* A,

Vb. *Er is een element* E *met* $A . E = A$ *voor elke* A.

VI. *Voor* $A \leqq B \leqq C$ *is er ten minste één element* X *in de structuur, waarvoor geldt* $B . X = A$ *en tevens* $B + X = C$.

Men noemt X een relatief complement van B en zegt als VI geldt, dat de structuur *complementair* is. Nu wij zover gevorderd zijn kunnen wij er toe overgaan voor het begrip punt een definitie te geven. Deze luidt

Definitie: *Punt noemt men een element* P, *als uit* $A \leqq P$ *volgt* $A = P$ *of* $A = N$;

en is dus in wezen gelijk aan die van Euclides: *Een punt is, wat geen delen heeft.* Vervolgens worden rechten gedefinieerd, als elementen,

die twee verschillende punten verbinden, enz. Het enige, wat nog gebeuren moet is thans: verzekeren, dat punten in voldoende mate aanwezig zijn en dat de ruimte het vereiste aantal dimensies verkrijgt. Dit geschiedt door enkele eenvoudige existentieaxioma's.

§ 12. *Existentie.*

Daarmede zijn wij gekomen aan het laatste punt, waarbij wij nog even stilstaan: de existentie der objecten, die wij ontmoet hebben. Het is mogelijk deze te benaderen van de wijsgerige zijde en ook kan men haar herleiden tot een vraag naar het bestaan der reële getallen of van de begrippen uit de leer der verzamelingen. Wij willen deze kant niet uitgaan en er ons toe bepalen op enkele bijzonderheden in Hilberts Grundlagen te wijzen. Het aldaar gegeven stelsel bevat geen rubriek existentieaxioma's en vertoont bijvoorbeeld de merkwaardigheid, dat de aanwezigheid van de punten in de beide eerste axioma's genoemd eerst door het tweede gedeelte van het derde axioma vast staat. Dit neemt niet weg, dat vele axioma's door hun „is te vinden" een „existentierende" strekking hebben. Wij zagen reeds, dat het volledigheidsaxioma eenzelfde uitwerking heeft. Daarnaast zijn er axioma's, die men wel „*afsluitingsaxioma*'s" noemt, omdat zij aan de expansie een halt toeroepen. Zo het zevende verbindingsaxioma I 7, waardoor twee vlakken met een gemeenschappelijk punt in het bezit van een snijlijn worden gesteld en dus de dimensie der ruimte tot drie beperkt wordt.

Voor Euclides was een voorwaarde voor bestaan: *construeerbaarheid.* Hilbert interesseert zich daar in zekere zin niet voor. Als hij heeft vastgesteld op grond van zijn axioma's in staat te zijn bij hoeken een relatie groter dan in te voeren, staat dat voor hem vrijwel gelijk met de mogelijkheid bij twee willekeurige hoeken uit te maken, welke de grootste is. Toch gaat het hier over twee niet dezelfde zaken. Voor de elementaire meetkunde levert dit geen moeilijkheden, wanneer men haar beoefent gewapend met passer en liniaal.

§ 13. *Literatuur.*

Van de vele publikaties, die zich met de besproken onderwerpen bezighouden, noemen wij er enkele.

[1] R. Baer, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic Analysis. Trans. Am. Math. Soc. 56 (1944), 94—129.

[2] L. Bieberbach, Einleitung in die Höhere Geometrie, 1933.

[3] J. Bilo, Bijdrage tot de grondslagenleer der gewone complexe projectieve meetkunde en tot de zuiver synthetische studie der complexe grondfiguren van de eerste soort. 1949.

[4] L. M. Blumenthal, Theory and applications of Distance Geometry, 1953.

[5] O. BOTTEMA, De elementaire meetkunde van het platte vlak, 1938.
[6] J. C. H. GERRETSEN, De structuurtheoretische grondslagen der projectieve meetkunde. Annalen Thijmgenootschap 37 (1949).
[7] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 1930.
[8] K. MENGER, Géométrie générale. Mém. Sci. Math. 124 (1954).
[9] K. REIDEMEISTER, Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, 1930.
[10] O. VEBLEN and J. H. C. WHITEHEAD, The foundations of differential geometry, 1932 (1953).
[11] B. L. VAN DER WAERDEN, De logische grondslagen der euklidische meetkunde, 1937.

DE VORMENDE WAARDE DER WISKUNDE

door

P. M. VAN HIELE EN D. VAN HIELE-GELDOF

In Euclides XXXII, nr. 2 merkt Van Haselen op, dat de vormende waarde van (goed) algebra-onderwijs veel groter is dan die van (uitgebreid) stereometrie-onderwijs. Op de vraag, of deze uitspraak gegrond is, kom ik in het vervolg van dit artikel terug. In ieder geval is het van het grootste belang te weten onder welke voorwaarden wiskunde vormende waarde zal bezitten. De keuze van de leerstof zal daarbij stellig van betekenis zijn.

Het begrip „vormende waarde" wordt door Prof. Stellwag („De Waarde der Klassieke Vorming") als volgt omschreven: „Wanneer iets geleerd wordt, wordt dan dit specifieke wat men leert, alleen maar geleerd, of daarmee nog iets anders, wat zijn invloed doet gevoelen op andere kennis-gebieden, en wat van meer waarde geacht moet worden dan wat feitelijk geleerd wordt, en wat men met het leren van dit heel speciale trachtte te bereiken."

Of de schoolvakken werkelijk een vormende waarde bezitten, is een vraag, die zeer moeilijk beantwoord kan worden. „Geistesformung" van Castiello is geheel aan onderzoekingen op dit gebied gewijd. De proeven zijn dikwijls niet zeer overtuigend: men vraagt zich bij de lezing van de verslagen ervan dikwijls af, of zij werkelijk wel zo iets als een vormende waarde toetsen. Heeft men eigenlijk wel een voldoende duidelijk koncept van „vormende waarde", dat het mogelijk maakt experimenten op te stellen, die de vormende waarde kunnen toetsen?

Het is deze twijfel, die bij de besprekingen over het ontwerpleerplan van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (dat op vele punten overeenkomst vertoont met dat van Wimecos) er toe geleid

heeft, dat men de vormende waarde der leervakken niet heeft laten meetellen. Behalve voor de meetkunde gold het praktische nut als criterium voor het al of niet opnemen van de leerstof. Achteraf bekeken was het toch misschien beter geweest de vraag van de vormende waarde maar moedig onder het oog te zien, ook al zou dit waarschijnlijk tot gevolg hebben gehad, dat het programma een jaar later zou zijn gereedgekomen. Immers, zoals Mursell in "The Psychology of Secondary-School Teaching" opmerkt, wij leraren zijn vast overtuigd van het bestaan van een „vormende waarde", zonder zulk een vormende waarde zou het vak voor de meeste leerlingen zijn betekenis verliezen.

Zowel van de wiskunde, als van de klassieke talen kan men zeggen, dat vele leerlingen, die deze vakken leren, waarschijnlijk hoogst zelden datgene, wat zij in die vakken specifiek geleerd hebben, direkt in de praktijk of in hun verdere studie zullen toepassen. Men zal de belangrijke plaats, die deze vakken in de onderwijsprogramma's innemen, moeten motiveren door hun belangrijke vormende waarde, of men zal moeten erkennen, dat vele leerlingen deze vakken alleen leren „om nog alle kanten uit te kunnen", d.w.z. om later een keus te kunnen doen, waardoor een groot deel van het geleerde waardeloos wordt.

In het ontwerp-leerplan van Wimecos is de vormende waarde wel impliciet aanwezig. Dit blijkt uit de criteria, welke voor de Kommissie hebben gegolden en uit de herhaalde verzekering, dat het om inzicht te doen is. *Het* kenmerk van inzicht is de mogelijkheid van transfer. Men kan zelfs zeggen, dat hoe hoger het bereikte inzicht is, des te ruimer de transfermogelijkheden. Kohnstamm („Keur uit het didactisch werk") spreekt dit als volgt uit: „Wat men onder vormende waarde verstaat is zeker niet het bezit van een zekere mate van kennis, maar het verwerven van het *inzicht*, dat het gevolg is van zekere arbeid." „Bij de scherpe onderscheiding van „inzicht" en „oefening" hebben we te doen met *het* centrale vraagstuk van een moderne wetenschappelijke didaktiek."

Men heeft getracht het probleem van de „vormende waarde" te benaderen door het denken te analyseren. Kohnstamm (t.a.p.) schrijft: „Vruchtbaar denken (waartoe zowel het oplossen van een nieuw probleem als het terugvinden van iets, dat men geweten heeft, behoort) onderscheidt zich van „ongeordend" denken door de toepassing van bepaalde „oplossingsmethoden" voor het probleem in quaestie. Het is de taak der denkpsychologie de oplossingsmethoden, die vermoedelijk zeer talrijk zijn, te leren kennen voor alle ons bekende probleemsoorten. Worden zij bewust toegepast, dan leidt dit tot

een sterk verhoogde vruchtbaarheid van denken." Deze gedachte, die gebaseerd is op de teorie van Selz, heeft sommigen gebracht tot de uitspraak, dat het gewenst zou zijn de leerlingen zoveel mogelijk „oplossingsmetoden" bij te brengen, opdat zij zo vruchtbaar mogelijk zouden leren denken. Men ziet daarbij echter twee dingen over het hoofd. Het eerste is, dat de oplossingsmetoden zelf tot gehelen gegroepeerd kunnen worden, die een eigen struktuur vertonen, zodat men, door zich tot een hoger standpunt op te werken, met de kennis van veel minder oplossingsmetoden toe kan. Het tweede is, dat nog in het geheel niet is aangetoond, dat oplossingsmetoden, die men op een bepaald gebied heeft opgedaan, ook transferabel zijn naar andere gebieden. Aan deze transfer mag men met des te meer recht twijfelen, naar mate de oplossingsmetoden in een geringere onderlinge samenhang (met minder struktuur) zijn verworven.

De analyse van het denken voert nog tot een andere mogelijkheid van transfer. Deze komt vooral tot uiting in de belangrijke brochure van mevr. Ehrenfest en prof. Freudenthal: „Kan het Wiskunde-onderwijs tot de Opvoeding van het Denkvermogen Bijdragen?"

Mevr. Ehrenfest schrijft o.a. het volgende: „Er wordt meestal onder „logisch denken" het *foutenvrij trekken* van *conclusies* uit *gegeven praemissen* verstaan." „Het duidelijk begrijpen van *wat een probleem is* en het vinden van de juiste *praemissen*, zijn veel moeilijker en beslissender opgaven en ze moeten aan het trekken van de eventuele conclusies voorafgaan."

„Wie moeten we een „logisch" mens noemen? Stellig niet hem, die uit een groep willekeurige, ongecontroleerde (of door iemand anders gegeven) praemissen op een onberispelijke wijze een hoeveelheid van „dus"-sen aan elkaar weet te rijgen, maar hem, die de kunst verstaat om *uit een nog niet geordend geheel* van gegevens de *bij de zaak behorende* gegevens *voor den dag* te *halen*; die onderscheidt tussen „juiste" beweringen en de *bij de zaak behorende juiste* beweringen; die belang stelt in goede argumentaties en het juist gebruik der woorden en die natuurlijk ook gevoelig is voor logische fouten."

Tot de (denk?)gewoonten, die thans op de eindexamina geoefend worden noemt zij o.a. „. . . in de mening verkeren, dat men „in de wiskunde" een speciale taal en een speciale „strengheid" moet toepassen . . . , zonder de *steun* van die strengheid en die beknopte taal bij het eigen zoeken naar een óf andere oplossing en haar formulering *beleefd* te hebben; de bepaalde typen van geleerde toepassingen herkennen en de daarbij behorende methoden uit de *herinnering* halen . . . of wel gokken."

„Voor hem, die gewend was aan de opvoedende waarde der wiskunde te geloven, is deze ontdekking *aanmoedigend*: immers, het geringe vermogen om zuiver en energiek te denken, dat men niet zelden bij bezitters van goede cijfers voor wiskunde aantreft, is niet aan de „niet-overdraagbaarheid" van het „wiskundig" denken te wijten, maar daaraan, dat men bij het onderwijs niet getracht heeft het *denken* te laten oefenen."

Men kan het ook als volgt uitspreken: De vormende waarde van de wiskunde moet niet in de eerste plaats gezocht worden in het kunnen opereren met bepaalde rekenwijzen, met bepaalde algoritmen, moet niet gezocht worden in het korrekt kunnen redeneren in een gegeven logisch deduktief systeem. Van veel groter betekenis is de *analyse,* die uitgaande van de waarnemingsstrukturen door middel van *abstraktie* ten slotte de wiskunde doet ontdekken. Welke relaties zijn kenmerkend in datgene, wat men waarneemt, hoe hangen deze relaties samen, dat is het, waarom het gaat. Hoe het mogelijk is vanuit een konkreet, oorspronkelijk niet-matematisch probleem met de leerlingen de meetkunde te ontdekken, heeft Mw. Van Hiele aangetoond in het door haar ontworpen werkstuk „tegels". De Miranda heeft onlangs van zijn ervaringen met dit werkstuk een belangwekkend verslag gegeven.

In de hiervoor genoemde brochure is Prof. Freudenthal veel skeptischer t.a.v. de vormende waarde der wiskunde. Hij merkt op, dat er mensen zijn, die de wiskunde niet snappen, omdat zij niet kunnen substitueren. Zij kunnen niet „. . . voor de driehoek, waarvan in een vroeger bewezen stelling sprake was, die driehoek substitueren, die in een nu te bewijzen stelling voorkomt . . .". „Zij zijn in het geheel niet toegankelijk voor de metode van formele substitutie, zonder welke geen wiskunde denkbaar is." Buiten de wiskundige wetenschappen en buiten de woord- en zinsontleding „zullen we wel niet veel meer van onze gading vinden, om de formele matematische metode nu bepaald als voorbeeld van de feitelijk beoefende denkkunst te kunnen aanprijzen."

„Er zijn nl. nog geheel andere „goede denkgewoonten", die juist in de wiskunde niet bepaald tot hun recht komen. Iemand, die de bekwaamheid mist tot het formeel substitueren, zou bijv. nog uitstekend in analogieën kunnen denken — iets wat we trouwens op elk ogenblik in veel hogere mate beoefenen dan het trekken van schoolse syllogistische conclusies."

Deze uitspraak is echter een bevestiging van het voorafgaande. De denkvorm, die de beste mogelijkheid van transfer biedt, ligt net even buiten de wiskunde. Zij wordt toegepast, juist vóórdat men

tot de wiskunde is doorgedrongen. Mw. Ehrenfest kan alleen tot de konklusie komen, dat de wiskunde een grote vormende waarde kan hebben, doordat zij aan het begrip „wiskunde" een ruimere betekenis geeft dan gebruikelijk is.

Wil men echter, dat het wiskundeonderwijs een grote vormende waarde zal hebben, dan zal men zich vooral in dat onderwijs moeten bezighouden *met het leren omvormen van konkrete (oorspronkelijk niet-wiskundige)problemen tot wiskunde.* Daarbij behoeft men niet zijn toevlucht te nemen tot voor het kind volslagen oninteressante ingeklede vergelijkingen. Neen, de onderwerpen liggen al klaar: in de meetkunde en in de statistiek. De meetkunde en vooral de stereometrie biedt de grootste gelegenheid tot vormende waarde, omdat daar de leerlingen de kans krijgen in de hun omringende voorwerpen de wiskunde te leren ontdekken. Men leze in dit verband ook het verslag van de lezing van Freudenthal: „Het Aanvankelijk Meetkundeonderwijs" (Faraday XXVI, nr. 2). In de statistiek zou een tweede gelegenheid kunnen worden verkregen, wanneer dit vak niet, zoals in het boek van Bunt, logisch deduktief zou worden opgezet, maar uit praktische gegevens zou worden ontdekt.

Het vak algebra is in wezen inderdaad het vak van de formele substitutie. En zoals Freudenthal betoogd heeft: van de formele substitutie mogen we niet veel transfer verwachten. Kohnstamm (t.a.p.) heeft aangetoond, dat er zelfs een negatieve transfer mogelijk is.

De uitspraak van Van Haselen, dat de vormende waarde van de algebra veel groter is dan die van de meetkunde, moet dus ernstig in twijfel getrokken worden. En we kunnen pas gaan hopen op een vormende waarde van het vak statistiek, wanneer dit op een totaal andere wijze wordt ingeleid dan in het boek van Bunt wordt aanbevolen.

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT [1])
(Wiskundig tijdschrift voor het Noorden)

Met ingang van het jaar 1953 heeft een verandering plaats gevonden in de wereld der Scandinavische wiskundige tijdschriften. Matematisk Tidsskrift (Deensch) en Norsk Matematisk Tidsskrift hebben opgehouden te verschijnen, en in plaats daarvan zijn gekomen Mathematica Scandinavica, dat artikelen van hoog wetenschappelijk karakter bevat, en Nordisk Matematisk Tidskrift, dat gewijd is aan elementaire wiskunde en didaktiek. Beide tijdschriften zijn een gemeenschappelijke uitgave der wiskundige vereenigingen in Zweden, Denemarken, Noorwegen, IJsland en Finland; het eerste bevat artikelen in het Engelsch, Fransch of Duitsch, het tweede in het Zweedsch (z), Deensch (d) of een der beide Noorsche talen (n), met een kort uittreksel in het Engelsch, en, als uitzondering, ook enkele artikelen in een der moderne talen. Terloops zij opgemerkt, dat het zeer interessante Zweedsche tijdschrift Elementa buiten deze reorganisatie is gebleven; het is eveneens van elementair en didaktisch karakter, maar bevat niet uitsluitend — zelfs niet overwegend — artikelen over wiskunde, maar ook bijdragen op het gebied van natuurkunde en scheikunde.

Nordisk Matematisk Tidskrift is, wat zijn inhoud betreft, van hetzelfde karakter als Euclides. Echter bevat het ook opgaven, later gevolgd door de oplossingen daarvan, en de opgaven der wiskundige prijsvragen voor leerlingen van middelbare scholen. Ten gerieve van de lezers van Euclides, die een of meer der noordelijke talen machtig zijn, volgt hier een (niet volledige) lijst van de artikelen, verschenen in de eerste drie jaargangen.

Eerste Jaargang (1953)

V. Brun, A generalisation of the formula of Simpson for non-equidistant ordinates.

S. Bundgaard, Didaktische opmerking over de invoering van complexe getallen. (d). De schrijver wijst er op, dat de gevolgde methode voor de leerlingen niet vreemd is, daar zij herinnert aan het verband tusschen analyse en constructie, dat hun uit de meetkunde bekend is.

[1]) De deskundige collega, die in staat was het bijgaande overzichtje voor Nederlanders samen te stellen, verdient de oprechte dank van de redactie.

O. Frostman, Een stelling van Fáry met stereometrische toepassingen. (z). Over projectie van hoeken, met toepassing op drie- en veelvlakshoeken.

Verslag van een congres over het meetkunde-onderwijs op de middelbare scholen in de scandinavische landen (d, n, z).

H. Jensen, De stafkaart van Denemarken. (d). Over de conforme kegelprojectie en iets over geodesie.

Twee artikelen over Niels Henrik Abel. (n).

R. Nevanlinna, De vierdimensionale ruimte. (z). Populair.

E. Følner, Over de speltheorie van Von Neumann. (d).

K. G. Hagstroem, Gustaf Eneström. (z). Herdenking.

H. Gask, Exponentieele en logarithmische functies bij het M.O. (z).

D. Fog, Over een meetkundige plaats. (d). Dit artikel handelt over eliminatie, parasitische stukken, enz.

I. Johansson, Didaktiek van het limietbegrip. (n).

Tweede Jaargang (1954)

E. J. Dijksterhuis, Die Integrationsmethoden von Archimedes.

F. Ehrnst, Iets over zelfwerkzaamheid in de klas. (z).

G. Dahlquist, De Monte-Carlo-methode. (z). Deze bestaat hierin, dat men een hasardspel construeert, waarbij de gemiddelde waarde van zekere uitkomsten aan een gegeven betrekking (vergelijking) voldoet, dan het spel een groot aantal malen speelt. Het artikel is niet gemakkelijk.

S. Stefánsson, Gelijkzijdige hyperbolen in verband met een driehoek. (d).

Over het wiskunde-onderwijs op de Zweedsche gymnasia. (z).

K. Piene, Boeken, die voor wiskunde-docenten van belang zijn. (n).

M. Tideman, Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions.

K. G. Hagstroem, De oppervlakte van de doorsnede van een kubus met een vlak loodrecht op een lichaamsdiagonaal, beschouwd als functie van den afstand van dat vlak tot een eindpunt der diagonaal, heeft een merkwaardige graphiek. (z).

F. Fabricius-Bjerre, Een elementaire (3,1)-transformatie. (d).

V. Brun, De roos van Nîmes. (n). Over een meetkundig versieringsmotief op een tempelruïne in Nîmes.

F. C. Holte, Binomiale verdeelingsfunctie. (z).

P. Kustaanheimo en B. Quist, Over eindige meetkunden en haar toepassing. (z). Eindige meetkunden — in den trant van de bekende geometrie van Fano — worden analytisch behandeld met behulp

van Galois-lichamen; interessante mededeelingen worden gedaan over de mogelijkheid, om deze meetkunden te gebruiken bij de formuleering van de grondwetten der natuurkunde.

O. Danielsson, Een eenvoudige meetkundige eigenschap: als men in een overstaand paar van de driehoeken, waarin een convexe vierhoek door zijn diagonalen verdeeld wordt, de hoogtepunten verbindt, en in het andere de zwaartepunten, dan zijn die verbindingslijnen onderling loodrecht. (d).

Th. Bang, Groote priemgetallen. (d). In dit artikel staat het grootste bekende priemgetal M_{2281}, van 687 cijfers, voluit afgedrukt. Verder beschouwingen over de methodiek van het wiskunde-onderwijs op de Zweedsche gymnasia. (z).

Derde Jaargang (1955)

I. Simola, Geschiedenis der wiskunde in verband met het onderwijs. (z).

K. Rander Buch, Uit de wordingsgeschiedenis der waarschijnlijkheidsrekening. (d).

E. J. Nyström, Over kegeloppervlakken.

C. E. Fröberg, Numerieke berekeningen op rekenmachines. (z).

E. S. Selmer, De onbepaalde vergelijking $X^3 + Y^3 = AZ^3$. (d).

A. Pleijel, Over convexe krommen. (z).

O. Schmidt, De stellingen van Ptolemaeus en Menelaus. (d). Historische beschouwingen en toepassingen op de oplossing van boldriehoeken.

N. Pipping, Halfregelmatige kettingbreuken. (z). Dat zijn kettingbreuken, waarin ook tellers -1 voorkomen.

K. Zeuthen Heidam, An approximation formula for the determination of areas.

H. Rådström, Zekere elementaire functionaalvergelijkingen, en het vijfde probleem van Hilbert. (z).

M. Pihl, Iets uit de geschiedenis van den hefboomregel. (d). Uit de geschiedenis der statica.

D. Fog. Uit de theorie der oppervlakken. (d). Voorbeeld van een oppervlak, dat in zeker punt geen minimum vertoont, niettegenstaande alle normale doorsneden in dat punt het wel doen.

V. Brun. On the problem of partitioning the circle so as to visualize Leibniz' formula for π.

L. Sandgren. Over zekere tekortkomingen in het wiskunde-onderwijs op de Zweedsche gymnasia. (z). Te geringe exactheid in de analyse.

DE FUNCTIES sin x EN cos x

door

Dr. W. A. M. BURGERS

Bij de behandeling van bovengenoemde functies, worden een tweetal eigenschappen gewoonlijk wel behandeld, maar m.i. niet voldoende uitgebuit om de leerlingen enig houvast te geven bij het memoriseren van de formules.

Vergelijkt men $\sin x$ met $\cos x$, dan is het eerste opmerkelijke verschil in gedrag, dat $\sin x$ op het interval (0, 90) stijgend en $\cos x$ op het interval (0, 180) dalend is.

Het tweede verschil is, dat $\sin x$ vergeleken kan worden met functies als: x, x^3, x^5 enz., dat $\sin x$ een *oneven* functie is, dat $-\sin x = \sin(-x)$, terwijl $\cos x$ vergeleken kan worden met functies als, x^2, x^4, x^6 enz. d.w.z. een *even* functie is, dat dus $\cos x = \cos(-x)$.

We gaan nu de formules, die men gewoonlijk laat memoriseren, a.v. scheiden.

A_1 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$_2$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

A_1' $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$_2'$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

„Som" → Product

B_1 $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

$_2$ $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

B_1' $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

$_2'$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Product → „Som"

C_1 $2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$

C_1' $2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$
$_2'$ $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

Van dubbele → enkele hoek

D_1 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ D_1' $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
$= 1 - 2 \sin^2 a$
$= 2 \cos^2 a - 1$

De linkerkolom bevat sinusformules, deze vertonen een duidelijk *oneven* karakter, d.w.z. door verandering van a in $-a$ en b in $-b$ slaan beide leden van teken om. *De „gemengde" termen zijn essentieel bij sinusformules.*

De rechterkolom bevat cosinusformules, deze vertonen een duidelijk *even* karakter. *De „gelijksoortigheid" van de termen is nu essentieel.*

Beschouwen we nu elke groep afzonderlijk.

Groep A (A').

Waarom is $\sin(a + b)$ een som en $\sin(a - b)$ een verschil, terwijl $\cos(a + b)$ een verschil en $\cos(a - b)$ een som is? (dus net „verkeerd"). Dit is direct duidelijk als men opmerkt, dat de formules ook geldig zijn als a, b en $(a + b)$ scherpe hoeken zijn. Want dan moet $\sin(a + b)$ groter zijn dan $\sin(a - b)$, terwijl $\cos(a + b)$ juist kleiner moet zijn dan $\cos(a - b)$.

Waarom is $\cos(a + b)$ gelijk aan $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ en *niet* $\sin a \sin b - \cos a \cos b$? Indien b toeneemt, neemt het linkerlid af. Het rechterlid moet dus ook afnemen. Nu neemt $\cos a . \cos b$ áf als b toeneemt, eveneens $- \sin a \sin b$. Het is duidelijk dat dus $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$ persé onjuist is, omdat nu het rechterlid met b stijgt.

Hiermede zijn de vier hoofdformules geheel „doorzichtig" geworden, groepen B, C en D zijn er de consequenties van. Toch is het nuttig deze afzonderlijk onder de loupe te nemen.

Groep B (B').

Welke functie moet het argument $\frac{a-b}{2}$ hebben? Dit is in groep B' vanzelf in orde. Maar in groep B?

Nu wordt B_2 voor $a = b$ gelijk aan nul (B_1 niet). Hiermede is het pleit beslecht. Tevens is duidelijk, dat B_2' een product van sinussen moet zijn. Blijft over dat min-teken in formule B_2'. Maar als a en b „bescheiden" hoeken zijn en a is groter dan b, dan is het linkerlid negatief. Zonder het min-teken zou het rechterlid echter positief zijn.

Groep C (C').

Laten we als voorbeeld nemen de omzetting van het product: $2 \sin a \cos b$ in een „som".

2 sin a cos b is oneven. In aanmerking komt dus alléén een „som" van twee sinussen. Deze som wordt dus sin $(a + b)$ + sin $(a - b)$ en zeker niet sin $(b + a)$ + sin $(b - a)$, want een toename van b, moet een afname tot gevolg hebben.

Is nu a een kleinere hoek dan b, dan gaat de som van de sinussen, automatisch over in een verschil. Het is dus volkomen zinloos, hiervoor een aparte formule te laten memoriseren.

Tenslotte is het aan te raden, bij de overgang van producten in „sommen", altijd de term met argument $(a - b)$ *voorop* te zetten. Het is bij C_1 an C_1' onbelangrijk, maar noodzakelijk bij C_2'. Hier moet n.l. een „positief" verschil komen. De term met het *kleinste* argument dient dus (daar de cosinus dalend is) voorop te komen.

Het loont de moeite, om zo met de leerlingen elke gememoriseerde formule „aan de tand te voelen"; dit kost tijd, maar men voorkomt dat men alleen domweg van buiten laat leren, alsof een mens slechts een robot zou zijn.

EEN VREEMDE ONTWIKKELING VAN sin $2x$ EN sin $3x$

door

Dr. W. A. M. Burgers

Laten we eens nagaan, hoe we b.v. sin $2x$ zouden kunnen ontwikkelen als functie van sin x en cos x. Uit het feit dat de vergelijking: sin $2x = \frac{1}{2}$, vier hoofdwaarden oplevert, moeten we concluderen, dat de veelterm „van de tweede graad" is.

In aanmerking komt dus:

$$A_1 \sin^2 x + A_2 \sin x \cos x + A_3 \cos^2 x + A_4 \sin x + A_5 \cos x + A_6.$$

Maar sin $2x$ is een oneven functie van x, zodat A_1, A_3, A_5 en A_6 nul zijn.

$$\sin 2x = A_2 \sin x \cos x + A_4 \sin x.$$

Vervangen we x door $(180 - x)$ dan slaat het linkerlid van teken om, en alleen de eerste term van het rechterlid. Dus $A_4 = 0$.

$$\sin 2x = A_2 \sin x \cos x.$$

Nemen we $x = 45°$ dan blijkt: $A_2 = 2$.

Wil men op deze wijze sin $3x$ ontwikkelen, dan kunnen de termen:

$\sin^2 x \cos x$, $\sin x \cos^2 x$ [1]), $\cos^3 x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos x$ en de bekende term weggelaten worden.

$$\sin 3x = A_1 \sin^3 x + A_2 \sin x \cos x + A_3 \sin x.$$

Vervangt men x door $180 - x$, dan blijft het linkerlid ongewijzigd. Van het rechterlid slaat de middelste term van teken om. Dus $A_2 = 0$.

$$\sin 3x = A_1 \sin^3 x + A_3 \sin x.$$

$$\begin{aligned} x = 30^\circ \text{ geeft: } & \left\{ \begin{aligned} 8 &= A_1 + 4A_3, \\ -1 &= A_1 + A_3, \end{aligned} \right. \\ x = 90^\circ \text{ geeft: } & \end{aligned}$$

waaruit $A_1 = -4$, $C = 3$.

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Vervang x door $90 - x$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Los van het bovenstaande nog de volgende opmerking.

Om een formule te vinden voor $\sin 3x$, is het verstandig te beginnen met

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin x &= 2 \sin 2x \cos x. \\ \sin 3x &= \sin x (4 \cos^2 x - 1) = \\ &= \sin x (3 - 4 \sin^2 x). \end{aligned}$$

En $\cos 3x$ a.v.

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x &= 2 \cos 2x \cos x. \\ \cos 3x &= \cos x (2 \cos 2x - 1) = \\ &= \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

MATHEMATISCH CONGRES EDINBURGH 1958

Inlichtingen over dit congres, dat van 14 tot 21 augustus 1958 zal worden gehouden, zijn verkrijgbaar aan het adres „International congress of mathematicians 1958, Mathematical institute, 16 Chambers street, Edinburgh". Men schrijve in het Engels, Frans, Duits of Russisch.

[1]) Daar $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ zal dus de term: $\sin x \cos^2 x$ „ondergebracht" kunnen worden bij de termen $\sin x$ en $\sin^3 x$.